Exercice 1 : Définitions de cours : syntaxe

Considérons les formules propositionnelle suivantes :
- $H_1 = r \vee (p \wedge ((\neg q) \rightarrow r))$
- $H_2 = p \wedge (r \wedge ((\neg q) \rightarrow (\neg p)))$
- $H_3 = ((q \vee \neg p) \rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)) \wedge ((\neg\neg q \vee \neg p) \rightarrow (\neg p \vee q))$

Pour chaque formule :

Q. 1 dessiner son arbre syntaxique ;

Q. 2 donner ses sous-formules ;

Q. 3 donner ses variables propositionnelles

Exercice 2 : Conséquence sémantique

Soient A, B, C trois formules propositionnelles. Les conséquences sémantiques suivantes sont-elles vérifiées ? Justifier.

1. $\{A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C\} \models C$
2. $A \rightarrow B \models \neg B \rightarrow \neg A$
3. $\{A \vee B, \neg A\} \models B$
4. $A \rightarrow B \models B \rightarrow A$
5. $\{\neg(A \vee B), C \rightarrow B\} \models \neg(A \vee C)$
6. $A \rightarrow B \models \neg A \rightarrow \neg B$
7. $\{A \rightarrow B, \neg B\} \models \neg A$
8. $\{A \rightarrow B, \neg A\} \models \neg B$
9. $\{\neg B \rightarrow \neg A, A\} \models B$
10. $\{\neg A \rightarrow \neg B, A\} \models B$

Exercice 3 : Fraternité [CCP2010]

Les universités anglophones nord-américaines sont célèbres pour leurs associations estudiantines, les fraternités, ou sororités. Celles-ci développent souvent une culture du secret.
Vous venez de rejoindre la fraternité $\Gamma\alpha\chi$. Lors de votre initiation, vous avez appris les règles gouvernant les discussions pour que seuls les membres puissent en comprendre le contenu. Lorsque plusieurs membres prennent la parole sur un sujet donné, soit ils disent tous la vérité, soit ils mentent tous. Si quelqu'un intervient sur plusieurs sujets, il peut avoir un rôle différent pour chaque sujet.
Pour être définitivement admis, vous devez démontrer votre maîtrise de ces règles. Vous participez à une discussion avec trois membres de la fraternité que nous appellerons A, B et C. Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre la salle d'intronisation. Si vous n'arrivez pas à rejoindre directement cette salle, vous ne serez pas admis.
Un premier sujet est abordé concernant la pièce dans laquelle se tiendra la cérémonie :

1. A : « La cérémonie se tiendra dans le gymnase »
2. C : « Non, elle ne se tiendra pas dans cette pièce »
3. A : « Ou alors dans le réfectoire »

Nous noterons G et R les variables propositionnelles associées à la pièce où se tiendra la cérémonie. Nous noterons A_1 et C_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de A et C sur le premier sujet.

Puis, un second sujet est traité concernant les escaliers qui permettent de rejoindre la pièce où se tiendra la cérémonie.

1. A : « Le premier escalier conduit à l'intronisation »
2. C : « Tu as raison »
3. A : « Le troisième escalier y conduit aussi »
4. B : « Si le deuxième escalier y conduit, alors le troisième n'y conduit pas »
5. C : « Le deuxième n'y conduit pas »

Nous noterons E_1, E_2, E_3 les variables propositionnelles correspondant au fait que le premier, le deuxième, le troisième escalier conduisent à la salle de cérémonie.
Nous noterons A_2, B_2 et C_2 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de A, B et C sur le second sujet.

Q. 1 Représenter le premier sujet abordé sous la forme d'une formule propositionnelle dépendant des formules A_1, et C_1.

Q. 2 Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules propositionnelles A_1 et C_1 dépendant des variables G et R.

Q. 3 Déterminer dans quelle pièce vous devez vous rendre pour rejoindre la cérémonie.

Q. 4 Représenter le second sujet abordé sous la forme d'une formule propositionnelle dépendant des formules A_2, B_2 et C_2.

Q. 5 Représenter les informations données par les participants sous la forme de trois formules propositionnelles A_2, B_2 et C_2 dépendant des variables E_1, E_2 et E_3.

Q. 6 En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer l'escalier que vous devez suivre pour rejoindre la cérémonie.

Q. 7 En admettant que les trois participants aient menti, pouviez vous prendre d'autres escaliers ? Si oui, le ou lesquels ?

Exercice 4 : Alice aux pays des merveilles [CCP 2002]

Lors de ses aventures au pays des merveilles, Alice est souvent accompagnée par le chat de Cheshire. Ce félin énigmatique s'exprime sous la forme d'affirmations logiques qui sont toujours vraies. Alice se trouve dans un couloir dont toutes les portes à sa taille sont fermées. La seule porte ouverte est nettement trop petite pour qu'elle puisse l'emprunter. Une étagère est fixée au-dessus de cette porte. Le chat dit alors à Alice : "L'un des flacons posés sur cette étagère contient un liquide qui te permettra de prendre une taille plus adéquate. Mais attention, les autres flacons peuvent contenir un poison fatal." Trois flacons sont effectivement posés sur l'étagère. Le premier est rouge, le second jaune, le troisième bleu. Une étiquette est collée sur chaque flacon. Alice lit l'inscription figurant sur chaque étiquette :

— Flacon rouge : le flacon jaune contient un poison. Le flacon bleu ne contient pas un poison ;
— Flacon jaune : si le flacon rouge contient un poison, alors le flacon bleu aussi ;
— Flacon bleu : je ne contiens pas un poison, mais au moins l'un des deux autres flacons contient un poison.

Q. 1 Axiomatiser les énoncés ci-dessus au moyen de trois formules I_R, I_J, I_B, représentant les énoncés des flacons rouge, jaune et bleu.

Q. 2 La conjonction de ces trois formules est elle satisfiable ?

Q. 3 Une des inscriptions est-elle une conséquence sémantique des deux autres ?

Q. 4 Dans le cas où aucun des trois flacons ne contient pas de poison, est-ce qu'une ou plusieur(s) inscription(s) est(sont) fausse(s) ? Si oui, laquelle ou lesquelles ?

Q. 5 Si les trois inscriptions sont vraies, est-ce qu'un ou plusieurs flacons contient(ent) un poison ? Si oui le(s)quel(s) ?

Q. 6 Si seuls les flacons ne contenant pas de poison ont une inscription vraie, est-ce qu'un ou plusieurs flacon(s) ne contient(nent) pas de poison ? Si oui, lequel ou lesquels ?

Exercice 5 : Barre de Scheffer

Nous enrichissons la logique d'un nouveau symbole binaire : `nand` , dont l'interprétation est définie de la manière suivante : $[\![H_1 \texttt{ nand } H_2]\!]^\rho = \overline{[\![H_1]\!]^\rho \cdot [\![H_2]\!]^\rho}$.

Q. 1 Pour chaque formule suivante, donner une formule équivalente utilisant uniquement `nand` comme connecteur de formules.

- $H_1 \wedge H_2$
- $\neg H_1$
- $H_1 \vee H_2$
- $H_1 \rightarrow H_2$
- $H_1 \leftrightarrow H_2$

Q. 2 Faire de même avec l'opérateur `nor` dont l'interprétation est $[\![H_1 \texttt{ nor } H_2]\!]^\rho = \overline{[\![H_1]\!]^\rho + [\![H_2]\!]^\rho}$

Exercice 6 : Formules duales

Dans cet exercice on se limite aux formules n'utilisant pas $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$. On définit le *dual* d'une formule H, dénoté $H^\star$ comme étant la formule obtenue en inversant $\top$ et $\bot$ et en inversant $\wedge$ et $\vee$.

Q. 1 Donner une définition inductive du dual d'une formule.

Q. 2 Montrer que si deux formules sont équivalentes, alors leurs duales sont aussi équivalentes.

Q. 3 Montrer si une formule est valide, sa formule duale est non satisfiable.

Exercice 7 : Logique avec `If`

Logique propositionnelle *alternative* $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$ Étant donné un ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P}$, l'ensemble des formules de la logique propositionnelle *alternative* $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$ sur $\mathcal{P}$, est défini inductivement comme suit.

- $\top$ et $\bot$ sont des formules de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$.
- Toutes les variables propositionnelles de $\mathcal{P}$ sont dans $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$.
- Si C, G et H sont trois formules de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$, alors $\texttt{if } C \texttt{ then } G \texttt{ else } H$ est une formule de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$.

Interprétation des formules de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$ Étant donnés un ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P}$ et un environnement propositionnel ρ sur $\mathcal{P}$, l'interprétation des formules de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$ est définie comme suit.

$$[\![\top]\!]^\rho = \mathsf{V} \quad [\![p]\!]^\rho = \rho(p) \text{ si } p \in \mathcal{P}$$
$$[\![\bot]\!]^\rho = \mathsf{F} \quad [\![\texttt{if } C \texttt{ then } G \texttt{ else } H]\!]^\rho = [\![C]\!]^\rho \cdot [\![G]\!]^\rho + \overline{[\![C]\!]^\rho} \cdot [\![H]\!]^\rho$$

1. Représentabilité des fonctions booléeennes par formules de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$

Q. 1 Donner une formule de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$ dont la sémantique est la fonction booléenne $(p, q, r) \mapsto p+q+r$.

Q. 2 Exprimer la sémantique de `if` C `then` G `else` H comme une disjonction, selon la valeur de $[\![C]\!]^\rho$.

Q. 3 Démontrer que toute fonction booléenne peut être représentée par une formule de la logique avec $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$.

Q. 4 Donner une fonction $\varphi : \mathcal{F}_{\texttt{if}} \to \mathcal{F}$ associant une formule de $\mathcal{F}$ à chaque formule de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$, φ doit être telle que $\forall H \in \mathcal{F}_{\texttt{if}}, [\![\varphi(H)]\!] = [\![H]\!]$.

Q. 5 Conclure quant à la représentabilité des fonctions booléennes dans la logique des propositions.

2. Représentabilité des formules de la logique propositionnelle par la logique alternative

Q. 6 Démontrer, en utilisant les résultats précédents, que pour toute formule H de la logique propositionnelle, il existe une formule équivalente à H en logique alternative.

On s'intéresse maintenant à la construction d'une telle formule.

Q. 7 Donner une fonction $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\texttt{if}}$ associant une formule de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$ à chaque formule de $\mathcal{F}$, ψ doit être telle que $\forall H \in \mathcal{F}, [\![\psi(H)]\!] = [\![H]\!]$.

On restreint la logique alternative en n'autorisant que des formules `if` C `then` G `else` H dans lesquelles C est une variable propositionnelle, on dénote $\mathcal{F}_{\texttt{if}}^-$ cette logique.

Règles de réécriture. On appelle règle de réécriture (c'est une définition par l'exemple) un énoncé de la forme $H_1 \wedge H_2 \rightsquigarrow \neg((\neg H_1) \vee (\neg H_2))$. Une telle règle décrit comment des sous-formules d'une formule doivent être successivement transformées. Un ensemble de règles de réécriture $(g_1 \rightsquigarrow d_1, \ldots, g_n \rightsquigarrow d_n)$ décrit donc un algorithme :

Algorithme 1 : Application d'un système de réécriture $(g_1 \rightsquigarrow d_1, \ldots, g_n \rightsquigarrow d_n)$ à une formule H

Entrée : Une formule H

1 **tant que** il existe une sous-formule G de H de la forme g_i **faire**

2 | remplacer G dans H par d_i ;

Par exemple la règle de réécriture $H_1 \wedge H_2 \rightsquigarrow \neg((\neg H_1) \vee (\neg H_2))$ permet la transformation d'une formule en une formule équivalente ne contenant pas de connecteur $\wedge$.

Q. 8 Proposer un ensemble de règles de réécriture dont l'application successive permet la transformation d'une formule de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}$ en une formule de $\mathcal{F}_{\texttt{if}}^-$ équivalente. Démontrer la correction de votre ensemble de règles de réécriture.

Q. 9 Est-il nécessaire d'appliquer cet algorithme aux formules produites à la **Q. 3** ?